GRAVIMETRIC GEOID MAP OF CANADA
by
Dezso Nagy

INTRODUCTION

The geoid is that particular equipotential surface which, over the oceans, passes through mean sea level. Under the continents it is the continuation of the mean sea-level surface. The geoid is an irregular surface. It is distinct from the reference ellipsoid, a smooth mathematical surface used for computations, which, on average, approximates the more irregular (and mathematically unknown) geoid. A knowledge of the geoid is of fundamental importance to various fields of physical geodesy and geophysics. For example, the reduction of measured distances to a reference (ellipsoidal) surface, the processing of satellite observations and the use of satellite-based navigation systems, all require a knowledge of geoidal heights. Geoidal height is the separation between the geoid and the geocentric reference ellipsoid. The shape of the geoid also provides information regarding the mass distribution inside the earth and geoidal heights are needed to reduce gravity anomalies to the reference surface.

Geoid determinations in Canada go back to the early fifties. The deflection of the vertical is the horizontal derivative (tilt) of the geoid, and its numerical integration provides the relative geoidal heights. Using astogeodetic deflections of the vertical, Ney (1953) made a local geoid determination in southeastern Canada. From gravity data, Shimazu (1962) calculated the deflections of the vertical and the isostatic geoid in the Prairies. Nagy (1963) also used gravity data and employed surface fitting techniques to calculate the deflections of the vertical in eastern Ontario and southern Quebec. Derényi (1963) calculated gravimetric deflections for a few selected stations in New Brunswick.

The first regional geoid map to include Canada was prepared by Fisher (1967), using astrogeodetic deflections. A gravimetric geoid calculated for North America by Vincent et al. (1972) also covered Canada. The first gravimetric geoid for Canada was calculated by Nagy and Paul (1973), who assembled gravity data for the entire world from sources available at the time. Canadian geoid determinations were subsequently carried out by Vaníček and Merry (1973) and by Lachapelle (1974). A combination of astrogeodetic and predicted gravimetric deflections of the vertical was used by Merry (1975) to calculate the geoid in eastern Canada. Recent geoid computations for Canada were carried out by Vaníček et al. (1986).

THEORY

There are various methods for calculating the geoid. Only the method used to compute the accompanying geoid map is outlined here. It employs only gravity data.

In a geocentric spherical coordinate system geoidal height is usually calculated from the formula derived by Stokes (1849):

$$N = \frac{R}{4\pi\gamma} \int_{\sigma} \Delta g S(\psi)\, d\sigma,$$

where N is the geoidal height,
R is the mean radius of the earth,
γ is the mean gravity,
Δg is the gravity anomaly,
$S(\psi)$ is the Stokes' function,
and $d\sigma$ is the surface element of the unit sphere.

Stokes' function is defined as:

$$S(\psi) = \operatorname{cosec}\tfrac{1}{2}\psi + 1 - 6\sin\tfrac{1}{2}\psi - 5\cos\psi - 3\cos\psi \ln\left(\sin\tfrac{1}{2}\psi + \sin^2\tfrac{1}{2}\psi\right).$$

Using this approach to calculate gravimetric geoidal height, the gravity anomaly, Δg, is multiplied by the Stokes' function and the area of the selected surface element. This product is then summed up over the entire sphere.

As the geoid computation is a surface integration, gravity data must, in theory, be available everywhere on the Earth to solve the problem. Because the Earth's surface still has large unsurveyed regions, the lack of gravity data over these regions affects the result of the computation. Since the function used in the numerical integration does not diminish linearly with spherical distance, but undulates between the two zeros of the function and reaches the same absolute value as it has near the origin, the effect of even the distant zones is important and must be taken into account. For this reason, since the earliest attempts at geoid computation, the gravity values for unsurveyed areas have had to be predicted. These predictions, however, are clearly much less reliable than data obtained from surface gravity measurements. Using more sophisticated analytical procedures, and including data other than gravity, the predictions have become more acceptable, particularly for global purposes. Although local geoids for small areas of special interest can be obtained with a relatively high accuracy, the incorporation of these local values into a homogeneous global geoid determination is still a problem, and the lack of gravity data over large unsurveyed regions prevents computation of a high precision global geoid.

COMPUTATION

The present computation used the following data-sets, assembled from various sources:

CANUS15: Contains 65 539 blocks and comprises two data-sets, each containing representative values for the 15′ X 15′ unit elements:

- CAN15: representative values for 44 029 blocks were calculated from 602 577 point gravity values of the National Gravity Data Base, Ottawa. A colour map of the free air gravity anomalies derived from point values has been issued — Canadian Geophysical Atlas - Map 2, Goodacre et al. (1987 a). The reference system used is GRS 1967 (International Association of Geodesy, Geodetic Reference System 1967, Special Publication No. 3, 1971, Paris).
- JS15: a file from the National Geodetic Survey Rockville, Md., containing the mean values of 1 256 119 points of the Observed Gravity Data File and resulting in 44 029 blocks of which 21 510 were used (excluded were data covering parts of Canada, offshore data, data over Hawaii, etc.). The reference system used is GRS 1967.

WORLD1: Contains 48 955 terrestial mean free air gravity values in 1° X 1° blocks, obtained from Ohio State University, which, after screening out the data covered by CANUS15, resulted in 44 203 blocks. The reference system used is GRS 1967.

MISSING: For the unsurveyed region of the earth, 15 608 values were calculated at the centres of 1° X 1° blocks from the Goddard Space Flight Center's GEM-T1 satellite model.

The final data-set consisted of 125 350 blocks, which were used to calculate geoidal heights over Canada at 6 398 somewhat irregularly distributed locations. These served as a basis for producing the geoid map. The computations were carried out on a Cray 1-S supercomputer. For further details see Nagy (1989). It shoud be noted that any gravimetric geoid determination is the result of a computation involving whatever gravity data are available and its accuracy depends on the accuracy of the input data. The irregularly distributed input is the result of measurements, reductions and regularizations (e.g. gridding required for the computations), and each step contributes its error to the final result. As the gravity data set is inhomogeneous, the error in the computed geoid will be different at different locations.

DISCUSSION

The interpretation of the geoid in terms of geology is complex, because at any one point it involves the integrated effect of surface gravity values all over the Earth. However, large subterranean masses have dominant effects producing large signals in the geoid. Looking at the satellite solutions, one finds about six locations on the Earth with large positive or negative geoid values. One of these global features is the large geoid low over Hudson Bay as can be seen on this map. This geoid low corresponds to a pronounced free air gravity anomaly low (Goodacre et al., 1987 a) and outlines a deficiency of mass beneath Hudson Bay. This mass deficiency is thought to be due, in part, to depression of the Earth's crust by ice loading during the most recent glaciation (Goodacre et al., 1987 b).

ACKNOWLEDGEMENT

The contribution of D.B. Hearty of the Geological Survey of Canada is very much appreciated.

CARTE DU GÉOÏDE GRAVIMÉTRIQUE DU CANADA
par
Dezso Nagy

INTRODUCTION

Le géoïde est la surface équipotentielle particulière qui enveloppe les océans en passant par le niveau moyen des mers. Sous les continents, il est le prolongement de la surface du niveau moyen des mers. Le géoïde est une surface irrégulière. Il est distinct de l'ellipsoïde de référence, surface mathématique régulière utilisée aux fins de calcul, qui approche en général le géoïde plus irrégulier (et indéfini mathématiquement). Sa connaissance est d'une importance fondamentale dans différents domaines de la géophysique et de la géodésie physique. Par exemple, pour ramener des distances mesurées à une surface de référence (ellipsoïde), traiter des observations de satellite et utiliser des systèmes de navigation par satellite, il faut dans chaque cas connaître la hauteur du géoïde. La hauteur du géoïde est la distance qui sépare le géoïde de l'ellipsoïde géocentrique de référence. La forme du géoïde renseigne aussi sur la répartition des masses à l'intérieur de la Terre, et il faut connaître la hauteur du géoïde pour rapporter les anomalies de gravité à la surface de référence.

La détermination du géoïde au Canada date du début des années 50. La déviation de la verticale est la dérivée par rapport à l'horizontale (inclinaison) du géoïde, et son intégration numérique donne les hauteurs géoïdiques relatives. A partir des déviations astrogéodésiques de la verticale, Ney (1953) a établi la carte locale du géoïde pour le sud-est du Canada. A partir de données sur la gravité, Shimazu (1962) a calculé les déviations de la verticale et le géoïde isostatique dans les Prairies. Nagy (1963) a aussi utilisé des données de gravité et des techniques d'ajustement des surfaces pour calculer les déviations de la verticale dans l'est de l'Ontario et le sud du Québec. Derényi (1963) a calculé les déviations gravimétriques pour quelques stations choisies du Nouveau-Brunswick.

La première carte régionale du géoïde incluant le Canada a été préparée par Fisher (1967) à partir de déviations astrogéodésiques. Vincent et coll. (1972) ont calculé un géoïde gravimétrique pour l'Amérique du Nord qui couvrait aussi le Canada. Le premier géoïde gravimétrique du Canada a été calculé par Nagy et Paul (1973) qui ont puisé dans le monde entier des données de gravité à partir des sources disponibles à l'époque. D'autres calculs du géoïde canadien ont été effectués par Vaníček et Merry (1973) et par Lachapelle (1974). Merry (1975) a combiné des déviations gravimétriques astrogéodésiques et prévues de la verticale pour calculer le géoïde dans l'est du Canada. De récents calculs du géoïde pour le Canada ont été effectués par Vaníček et coll. (1986).

THÉORIE

Il existe plusieurs méthodes pour calculer le géoïde. Seule la méthode utilisée pour calculer la carte du géoïde ci-jointe est décrite dans le présent document. Elle repose uniquement sur des données de gravité.

Dans un système géocentrique de coordonnées sphériques, la hauteur géoïdique est en général calculée à partir de l'équation de Stokes (1849):

$$N = \frac{R}{4\pi\gamma} \int_{\sigma} \Delta g S(\psi)\, d\sigma,$$

où N est la hauteur du géoïde,
R est le rayon moyen de la Terre,
γ est l'accélération moyenne due à la pesanteur,
Δg est l'anomalie de la gravité,
$S(\psi)$ est la fonction de Stokes,
et $d\sigma$ est l'élément de surface de la sphère unitaire.

La fonction de Stokes est définie comme suit:

$$S(\psi) = \operatorname{cosec}\tfrac{1}{2}\psi + 1 - 6\sin\tfrac{1}{2}\psi - 5\cos\psi - 3\cos\psi \ln\left(\sin\tfrac{1}{2}\psi + \sin^2\tfrac{1}{2}\psi\right).$$

Dans cette méthode de calcul de la hauteur gravimétrique du géoïde, l'anomalie de gravité, Δg, est multipliée par la fonction de Stokes et par l'aire de l'élément de surface choisi. Ce produit est ensuite sommé sur l'ensemble de la sphère.

Comme le calcul du géoïde consiste en une intégration de surface, des données de gravité doivent, en théorie, être disponibles sur toute l'étendue de la Terre pour qu'on puisse résoudre le problème. Comme de grandes régions du globe n'ont pas encore été levées, le manque de données de gravité dans ces régions influe sur le résultat du calcul. Et comme la fonction utilisée dans l'intégration numérique ne diminue pas linéairement en fonction de la distance sphérique, mais oscille entre les deux zéros de la fonction et atteint la même valeur absolue que près de l'origine, l'effet des zones, même éloignées, est important et doit être pris en compte. C'est pourquoi, depuis les premières tentatives de calcul du géoïde, les valeurs de la pesanteur pour les zones non levées devaient être prévues. Ces prévisions sont toutefois nettement moins fiables que les données obtenues à partir de mesures de la pesanteur en surface. Grâce à des méthodes analytiques plus perfectionnées et des données autres que sur la pesanteur, les prévisions sont devenues plus acceptables, notamment à l'échelle globale. Même si des géoïdes locaux pour de petites régions d'intérêt particulier peuvent être établis avec une précision relativement grande, l'introduction de ces valeurs locales dans le calcul d'un géoïde global homogène est toujours problématique, et le manque de données sur la gravité pour de grandes régions non levées empêche le calcul d'un géoïde global très précis.

CALCUL

Le présent calcul a porté sur les ensembles de données suivants qui ont été tirés de diverses sources:

CANUS15: renferme 65 539 blocs et deux ensembles de données contenant chacun des valeurs représentatives pour les éléments unitaires de 15′ X 15′:

- CAN15: des valeurs représentatives pour 44 029 blocs ont été calculées à partir de 602 577 valeurs ponctuelles de la pesanteur de la Banque nationale de données gravimétriques, Ottawa. Une carte en couleurs des anomalies gravimétriques à l'air libre, basée sur des valeurs ponctuelles, a été publiée — Atlas géophysique du Canada - Carte 2, Goodacre et coll. (1987 a). Le système de référence utilisé est le GRS 1967 (Association Internationale de Géodésie, Système de Référence Géodésique 1967, Publication Spéciale No. 3, 1971, Paris).
- US15: fichier du National Geodetic Survey, Rockville (Md), utilisant les moyennes de 1 256 119 points du Observed Gravity Data File pour produire 44 029 blocs dont 21 510 ont été utilisés (ont été exclues des données couvrant des régions du Canada, des données extracôtières, des données sur Hawai, etc.). Le système de référence utilisé est le GRS 1967.

WORLD1: renferme 48 955 moyennes gravimétriques terrestres à l'air libre dans des blocs de 1° X 1°, provenant de l'Ohio State University, qui, une fois écartées les données de CANUS15, ont produit 44 203 blocs. Le système de référence utilisé est le GRS 1967.

MISSING: pour la région non levée du globe, 15 608 valeurs ont été calculées au point central de blocs de 1° X 1° à partir du modèle de satellite GEM-T1 du Goddard Space Flight Center.

L'ensemble final de données était constitué de 125 350 blocs qui ont été utilisés pour calculer les hauteurs du géoïde au Canada dans 6 398 emplacements distribués de façon irrégulière. Ces derniers ont servi de base pour produire la carte du géoïde. Les calculs ont été faits sur un super-ordinateur Cray 1-S. Pour de plus amples détails, voir Nagy (1989). A noter que tout calcul du géoïde gravimétrique demeure un calcul basé sur les données gravimétriques disponibles et que son exactitude dépend de celle des données d'entrée. Les données provenant d'emplacements distribués de façon irrégulière sont le résultat de mesures, de corrections et de régularisation (p. ex. le quadrillage requis pour les calculs), et chaque étape contribue à l'erreur sur le résultat final. Comme l'ensemble de données gravimétriques n'est pas homogène, l'erreur sur le géoïde calculé différera d'un emplacement à l'autre.

ANALYSE

L'interprétation du géoïde en termes de géologie est complexe parce qu'en un point quelconque, elle repose sur l'effet intégré des valeurs de la gravité en surface partout sur la Terre. Cependant, les grandes masses souterraines ont des effets dominants dans l'établissement du géoïde. L'examen des solutions de satellite révèle l'existence de six emplacements sur le globe où le géoïde prend des valeurs positives ou négatives élevées. Un de ces emplacement se trouve dans la baie d'Hudson où le géoïde passe par un minimum comme la carte l'indique. Ce minimum correspond à une forte dépression gravimétrique à l'air libre (Goodacre et coll., 1987 a) et révèle une carence massique sous la baie d'Hudson. Cette carence massique serait due en partie à une dépression de la croûte terrestre sous la charge des glaces pendant la dernière glaciation (Goodacre et coll., 1987 b).

REMERCIEMENTS

L'auteur tient à remercier sincèrement D.B. Hearty, de la Commission géologique du Canada pour sa contribution.

REFERENCES - RÉFÉRENCES

Derényi, E.E.,
1963: Deflections of the vertical in central New Brunswick; M.Sc.E. thesis, Department of Civil Engineering, Surveying Engineering Division, University of New Brunswick, Fredericton.

Despotakis, V.K.,
1986: The Development of the June 1986 1° X 1° and the August 1986 30′ X 30′ Terrestrial Mean Free-Air Anomaly Data Bases; Internal Report, Department of Geodetic Science and Surveying, The Ohio State University, Columbus, Ohio.

Fisher, I.,
1967: Geoid contours in North America from astro-geodetic deflections; 1927 North American datum, Sheet 2. Map. U.S. Army Map Service, Washington, D.C.

Goodacre, A.K., Grieve, R.A.F., and Halpenny, J.F.,
1987 a: Free air gravity anomaly map of Canada / Carte des anomalies gravimétriques à l'air libre du Canada; Geological Survey of Canada / Commission géologique du Canada, Canadian Geophysical Atlas, Map 2, scale 1:10 000 000 / Atlas géophysique du Canada, Carte 2, échelle 1/10 000 000.
1987 b: Isostatic gravity anomaly map of Canada / Carte des anomalies gravimétriques isostatiques du Canada; Geological Survey of Canada / Commission géologique du Canada, Canadian Geophysical Atlas, Map 4, scale 1:10 000 000 / Atlas géophysique du Canada, Carte 4, échelle 1/10 000 000.

Lachapelle, G.,
1974: A study of the geoid in Canada; The Canadian Surveyor, v. 28, no. 3.

Marsh, J.G., Lerch, F.J., Putney, B.H., Christodoulidis, D.C., Felsentreger, T.L., Sanchez, B.V., Smith, D.E., Klosko, S.M., Martin, T.V., Pavlis, E.C., Robbins, S.M., Williamson, R.G., Colombo, O.L., Chandler, N.L., Rachlin, K.E., Patel, G.B., Bhati, S., and Chinn, D.S.,
1987: An Improved Model of the Earth's Gravitational Field: *GEM-T1*, NASA, Technical Memorandum 4019.

Merry, C.L.,
1975: Development and evaluation of a technique for deflection prediction and astrogravimetric geoid determination; Ph.D. thesis, Department of Surveying Engineering, University of New Brunswick, Fredericton.

Nagy, D.,
1963: Gravimetric deflections of the vertical by digital computers; Publication of the Dominion Observatory, Ottawa, XXVII, no. 1.

Nagy, D.,
1989: GEOID '88: A gravimetric geoid for Canada; Geological Survey of Canada, Open File 1977.

Nagy, D., and Paul, M.K.,
1973: Gravimetric geoid of Canada. Presented at the Symposium on the Earth's Gravitational Field and Secular Variations in Position. Sydney, Australia, 20-30, November, Page 188.

Ney, C.H.,
1953: Contour of the geoid in southeastern Canada; Bulletin Géodésique, no. 23.

Shimazu, Y.,
1962: A study of the geophysical and geodetic implications of gravity data for Canada; Publication of the Dominion Observatory, Ottawa, XXVI, no. 7.

Stokes, G.G.,
1849: On the variation of gravity on the surface of the earth; Cambridge Philosophical Society, Transactions, v. 8.

Vaníček, P., and Merry, C.L.,
1973: Determination of the geoid from deflections of the vertical using a least-squares surface fitting technique; Bulletin Géodésique, no. 109.

Vaníček, P., Kleusberg, A., Chang, R-G., Fashir, H., Christou, N., Hofman, M., Kling, T., and Arsenault, T.,
1986: The Canadian Geoid; Department of Surveying Engineering, University of New Brunswick, Fredericton.

Vincent, S., Strange, W.E., and Marsh, J.G.,
1972: A detailed gravimetric geoid of North America, North Atlantic, Eurasia and Australia. Presented to the International Symposium on Earth Gravity Models and Related Problems. Saint Louis, Missouri.

Copies of this map may be obtained from the Geological Survey of Canada:
601 Booth Street, Ottawa, Ontario K1A 0E8
3303-33rd Street, N.W., Calgary, Alberta T2L 2A7

Compiled by Geophysical Data Centre, Geological Survey of Canada
Published 1989. Printed by the Cartographic Information and Distribution Centre.

On peut obtenir des exemplaires de cette carte en s'adressant à la Commission géologique du Canada aux adresses suivantes:
601 rue Booth, Ottawa, Ontario K1A 0E8
3303-33ième rue, N.O., Calgary, Alberta T2L 2A7

Compilée par le Centre des données géophysiques, Commission géologique du Canada
Imprimée par le Centre d'information et de distribution cartographiques. Publiée en 1989

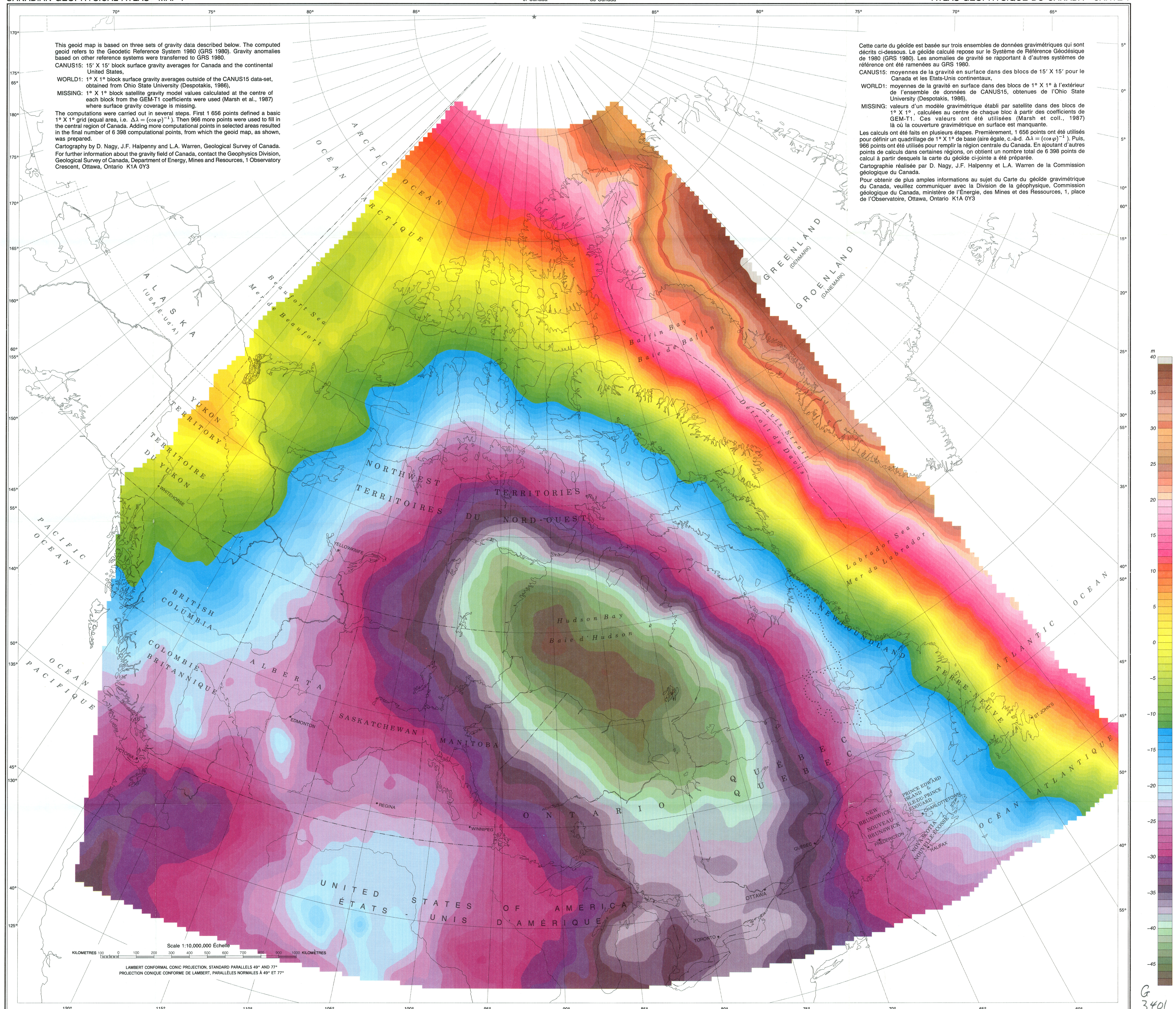
Recommended citation:
D. Nagy
1989: Gravimetric Geoid Map of Canada
Geological Survey of Canada
Canadian Geophysical Atlas, Map 7, scale 1:10 000 000

Notation bibliographique conseillée:
D. Nagy
1989: Carte du géoïde gravimétrique du Canada
Commission géologique du Canada
Atlas géophysique du Canada, Carte 7, échelle 1/10 000 000

Energy, Mines and Resources Canada — Énergie, Mines et Ressources Canada
Geological Survey of Canada — Commission géologique du Canada

CANADIAN GEOPHYSICAL ATLAS - MAP 7

ATLAS GÉOPHYSIQUE DU CANADA - CARTE 7



This geoid map is based on three sets of gravity data described below. The computed geoid refers to the Geodetic Reference System 1980 (GRS 1980). Gravity anomalies based on other reference systems were transferred to GRS 1980.

CANUS15: 15′ X 15′ block surface gravity averages for Canada and the continental United States,

WORLD1: 1° X 1° block surface gravity averages outside of the CANUS15 data-set, obtained from Ohio State University (Despotakis, 1986),

MISSING: 1° X 1° block satellite gravity model values calculated at the centre of each block from the GEM-T1 coefficients were used (Marsh et al., 1987) where surface gravity coverage is missing.

The computations were carried out in several steps. First 1 656 points defined a basic 1° X 1° grid (equal area, i.e. $\Delta\lambda = (\cos\varphi)^{-1}$). Then 966 more points were used to fill in the central region of Canada. Adding more computational points in selected areas resulted in the final number of 6 398 computational points, from which the geoid map, as shown, was prepared.

Cartography by D. Nagy, J.F. Halpenny and L.A. Warren, Geological Survey of Canada.

For further information about the gravity field of Canada, contact the Geophysics Division, Geological Survey of Canada, Department of Energy, Mines and Resources, 1 Observatory Crescent, Ottawa, Ontario K1A 0Y3

Cette carte du géoïde est basée sur trois ensembles de données gravimétriques qui sont décrits ci-dessous. Le géoïde calculé repose sur le Système de Référence Géodésique de 1980 (GRS 1980). Les anomalies de gravité se rapportant à d'autres systèmes de référence ont été ramenées au GRS 1980.

CANUS15: moyennes de la gravité en surface dans des blocs de 15′ X 15′ pour le Canada et les Etats-Unis continentaux,

WORLD1: moyennes de la gravité en surface dans des blocs de 1° X 1° à l'extérieur de l'ensemble de données de CANUS15, obtenues de l'Ohio State University (Despotakis, 1986),

MISSING: valeurs d'un modèle gravimétrique établi par satellite dans des blocs de 1° X 1°, calculées au centre de chaque bloc à partir des coefficients de GEM-T1. Ces valeurs ont été utilisées (Marsh et coll., 1987) là où la couverture gravimétrique en surface est manquante.

Les calculs ont été faits en plusieurs étapes. Premièrement, 1 656 points ont été utilisés pour définir un quadrillage de 1° X 1° de base (aire égale, c.-à-d. $\Delta\lambda = (\cos\varphi)^{-1}$). Puis, 966 points ont été utilisés pour remplir la région centrale du Canada. En ajoutant d'autres points de calculs dans certaines régions, on obtient un nombre total de 6 398 points de calcul à partir desquels la carte du géoïde ci-jointe a été préparée.

Cartographie réalisée par D. Nagy, J.F. Halpenny et L.A. Warren de la Commission géologique du Canada.

Pour obtenir de plus amples informations au sujet du Carte du géoïde gravimétrique du Canada, veuillez communiquer avec la Division de la géophysique, Commission géologique du Canada, ministère de l'Énergie, des Mines et des Ressources, 1, place de l'Observatoire, Ottawa, Ontario K1A 0Y3

Canadian Geophysical Atlas - 1:10,000,000