

COMMISSION
GÉOLOGIQUE
DU
CANADA

MINISTÈRE DE L'ÉNERGIE,
DES MINES ET DES RESSOURCES

ÉTUDE 68-59

L'APPLICATION DE LA STATISTIQUE
AU PALÉOMAGNÉTISME

A. Larochelle

This document was produced
by scanning the original publication.

Ce document est le produit d'une
numérisation par balayage
de la publication originale.



COMMISSION GÉOLOGIQUE
DU CANADA

ÉTUDE 68-59

L'APPLICATION DE LA STATISTIQUE
AU PALÉOMAGNÉTISME

A. Larochelle

MINISTÈRE DE L'ÉNERGIE, DES MINES ET DES RESSOURCES

© Droits de la Couronne réservés

En vente chez l'Imprimeur de la Reine à Ottawa,
et dans les librairies du Gouvernement fédéral
dont voici les adresses:

HALIFAX

1735, rue Barrington

MONTRÉAL

Édifice AEterna-Vie, 1182 ouest, rue Ste-Catherine

OTTAWA

Édifice Daly, angle Mackenzie et Rideau

TORONTO

221, rue Yonge

WINNIPEG

Édifice Mall Center, 499, avenue Portage

VANCOUVER

657, rue Granville

ou chez votre libraire.

Des exemplaires sont à la disposition des intéressés
dans toutes les bibliothèques publiques du Canada.

Prix \$ 1. 50

N° de catalogue M44-68-59F

Prix sujet à changement sans avis préalable

ROGER DUHAMEL, M.S.R.C.

Imprimeur de la Reine et Contrôleur de la Papeterie

Ottawa, Canada

1968

TABLE DES MATIÈRES

	Page
Sommaire	iv
Introduction	1
Présentation des données	2
Estimations des paramètres statistiques	2
Loi de distribution	4
Vérification de la normalité d'une population	7
Méthode d'analyse de la variance	8
Exemple numérique	13
Conclusion	19
Références	19
Tableau I Distribution des écarts angulaires θ ; résultats du test par le critérium χ^2	14
II Mesures répétées des directions d'aimantation de deux échantillons	14
III Directions d'aimantation des spécimens du site de prélèvement N° 1	15
IV Intra- et inter-variances à l'échelle des sites	16
V Directions moyennes d'aimantation des échantillons en provenance du Mont St-Bruno	17
VI Intra- et inter-variances des directions d'aimantation à l'échelle des intrusifs	18
VII Directions moyennes d'aimantation aux 16 sites de prélèvement	18

Figures

Figure 1. Courbes de distribution des écarts angulaires θ pour les populations normales ayant respectivement un écart-type angulaire δ de $\pi/3$, $\pi/5$, $\pi/6$ et $\pi/8$ radians	6
--	---

Sommaire

Les méthodes de la statistique sont adaptées au traitement des données paléomagnétiques à partir de formules dérivées pour estimer l'écart-type et la variance angulaires d'une population de vecteurs unitaires. On démontre que ces formules sont valables pour les cas où la plupart des vecteurs de l'échantillon s'écartent de leur moyenne d'un angle inférieur à $\pi/4$. L'analogie d'une distribution normale pour une telle population est défini et une adaptation de la méthode d'analyse de la variance à la statistique des vecteurs unitaires est décrite. Un exemple numérique illustre l'application de ces considérations théoriques à un cas pratique.

Abstract

Standard statistical methods are adapted to the processing of paleomagnetic data from expressions derived for estimating the angular standard deviation and variance of a unit length vector population. It is shown that these expressions are valid whenever most of the vectors in a sample diverge from their mean by an angle smaller than $\pi/4$. The analogue of a normal distribution for such a population is defined and an adaptation of the variance ratio method to the statistics of directions is described. A numerical example illustrates the application of these theoretical considerations to an actual set of data.

L'APPLICATION DE LA STATISTIQUE AU PALÉOMAGNÉTISME

Introduction

La statistique a depuis longtemps trouvé droit de cité dans plusieurs domaines de la science expérimentale et c'est grâce à elle que plus d'un développement important de la technique moderne a vu le jour. Elle a fait son entrée en Paléomagnétisme au début de la dernière décennie avec les adaptations de Fisher (1953), de Bruckshaw et Vincenz (1954) et de Watson (1956). Malheureusement, ces travaux sont écrits dans une langue peu familière au non-spécialiste en statistique et il importe de revoir dans une optique plus adaptée au géologue et au géophysicien les principes et les méthodes qui sont à la base même de l'analyse des données paléomagnétiques: ce sera le but du présent article.

Les conclusions tirées d'études paléomagnétiques découlent essentiellement des mesures de l'aimantation rémanente d'échantillons orientés "in situ", au cours de leur prélèvement. Les facteurs pouvant contribuer à la dispersion des intensités aussi bien que des directions d'aimantation rémanente relevées au cours de l'étude d'une formation géologique comprennent principalement les erreurs expérimentales de l'échantillonnage et des mesures, l'hétérogénéité et l'instabilité magnétiques de la roche, la variation séculaire et les anomalies locales du champ magnétique terrestre ancien aussi bien que les effets de la foudre, de l'altération chimique et des basculements relatifs de la roche en place. On peut réduire jusqu'à un certain point la portée de certains de ces facteurs en prenant les précautions voulues et en appliquant les corrections nécessaires mais certains éléments défieront toujours le chercheur le plus attentif. D'autre part, les divers facteurs de dispersion seront généralement appelés à jouer les uns contre les autres et la résultante de leurs effets respectifs s'étalera plus ou moins suivant les lois du hasard: c'est là la raison fondamentale qui doit motiver l'emploi de la statistique dans l'interprétation des mesures de l'aimantation rémanente des roches.

Puisque les aimantations rémanentes sont des quantités vectorielles, l'analyse de leur dispersion peut se faire selon deux points de vue: on pourra étudier la dispersion des modules des vecteurs autour de leur moyenne arithmétique ou analyser la dispersion angulaire des mêmes vecteurs autour de leur direction moyenne. La première analyse ne comporte rien de particulier

Manuscrit reçu: le 30 septembre 1968.

Adresse de l'auteur: Commission géologique du Canada,
601, rue Booth,
Ottawa, Canada.

qui ne soit déjà prévu dans les traités de statistique; par contre, la statistique des directions n'entrant en ligne de compte que dans un nombre limité de domaines, les traités s'en préoccupent beaucoup moins. Le présent article se bornera à ce deuxième aspect.

Présentation des données

La nature aléatoire des données paléomagnétiques implique que les mesures soient effectuées sur des échantillons suffisamment nombreux. L'échantillonnage d'une formation géologique se fera donc généralement à différents niveaux stratigraphiques et sur plusieurs affleurements où on notera avec soin l'attitude de la formation afin de pouvoir compenser, s'il y a lieu, l'effet de basculement relatif de la roche. À chaque site de prélèvement on collectionnera plusieurs échantillons afin d'éliminer autant que possible les erreurs inhérentes à la méthode d'orientation utilisée. Enfin, les mesures seront faites sur deux ou plusieurs spécimens tirés de chaque échantillon dans le but de diminuer les chances d'erreurs grossières dans les mesures et d'évaluer le degré d'homogénéité de l'aimantation dans l'échantillon.

Les directions moyennes d'aimantation des échantillons jugés suffisamment homogènes pourront être présentés en tableau ou sous une forme graphique quelconque. Un examen rapide de ces tableaux ou de ces graphiques pourra sans doute conduire à une interprétation logique dans plusieurs cas mais il sera souvent nécessaire de pousser plus à fond l'examen d'un groupe de données si l'on veut en tirer pleinement profit. Les données seront alors résumées sous une forme plus facile à manipuler par un petit nombre de paramètres dont les plus connus et les plus utiles sont la direction moyenne, l'écart-type angulaire et la variance angulaire.

Estimation des paramètres statistiques

Étant donné que nous nous intéressons ici seulement à la dispersion angulaire de groupes de vecteurs, il va de soi que les modules des vecteurs ne peuvent entrer en ligne de compte. Si l'on convient de donner à chacun des N vecteurs d'un groupe donné l'unité de module, les cosinus directeurs de leur résultante, de module R , définissent la direction moyenne du groupe. Dénnotant par (λ, μ, ν) les cosinus directeurs de la direction moyenne exacte de la population échantillonnée et par (l_i, m_i, n_i) ceux du $i^{\text{ème}}$ des N vecteurs, l'angle $\Delta_{\vec{R}}$ entre la direction moyenne exacte de la population et celle du groupe est donné par la relation

$$(1) \quad \cos \Delta_{\vec{R}} = (\lambda \Sigma l_i + \mu \Sigma m_i + \nu \Sigma n_i) / R$$

Comme l'angle $\Delta \bar{R}$ est minimum lorsque

$$(2) \quad \frac{\lambda R}{\sum l_i} = \frac{\mu R}{\sum m_i} = \frac{\nu R}{\sum n_i}$$

on en conclut que les cosinus directeurs de \bar{R} définissent, d'après l'information que nous fournit l'échantillon*, la meilleure estimation de la direction moyenne de la population.

L'écart angulaire entre deux vecteurs étant tout simplement l'angle qu'ils font entre eux, on définit l'écart angulaire moyen, $\bar{\theta}$, d'un groupe de N vecteurs par rapport à sa moyenne par la relation

$$(3) \quad \bar{\theta} = \sum \theta_i / N$$

θ_i étant l'écart angulaire du $i^{\text{ème}}$ vecteur. L'estimation de l'écart-type angulaire de la population échantillonnée est un peu plus délicate si l'on note que la dispersion angulaire de celle-ci est reflétée dans l'échantillon et par la dispersion des vecteurs autour de leur résultante et par la dispersion de celle-ci autour de la direction moyenne exacte de la population. En invoquant la propriété d'additivité des variances, on écrira donc que $\sum \theta_i^2 / N$ constitue une estimation non pas de la variance angulaire d'une mesure mais de la variance d'une mesure diminuée de celle des résultantes d'échantillons de N vecteurs, soit $\delta^2 (1 - 1/N)$. Si la plupart des vecteurs de l'échantillon satisfont la condition

$$(4) \quad \cos \theta_i \cong 1 - \theta_i^2 / 2$$

(ce qui est relativement valable pour $\theta_i \leq \pi/4$), on peut écrire

$$(5) \quad \sum \cos \theta_i = N - \sum \theta_i^2 / 2 = R$$

Il s'ensuit que

$$(6) \quad \sum \theta_i^2 / N = 2(N-R) / N = (1-1/N) \delta^2$$

* Le terme échantillon désigne ici l'ensemble des vecteurs représentant les directions moyennes d'aimantation des N échantillons de la roche.

ou (7) $\delta^2 = 2(N-R) / (N-1)$

Une estimation correcte de l'écart-type angulaire de la population nous est donc fournie par

(8) $\delta = [2(N-R) / (N-1)]^{1/2}$

tandis que l'estimation de l'écart-type angulaire de la résultante s'exprime par

(9) $\delta_{\bar{R}} = \frac{\delta}{\sqrt{N}}$

~~plutôt que par δ/\sqrt{R} , tel que préconisé précédemment (Laroche, 1967).~~

Peu importe si les N vecteurs unitaires sont distribués symétriquement autour de leur moyenne, les trois dernières équations valent toujours pourvu que la condition $\theta_i \leq \pi/4$ soit réalisée à quelques exceptions près. En pratique, on constate que très souvent toutes les directions d'aimantation d'un échantillon paléomagnétique satisfont cette condition, ce qui justifie dans ces cas l'emploi des équations (7) et (8) pour estimer la dispersion angulaire de la population étudiée.

Loi de distribution

Si en plus de satisfaire la condition exprimée par l'équation (4) les vecteurs d'un échantillon sont distribués à peu près symétriquement autour de leur moyenne, on peut considérer la possibilité qu'ils s'évalent autour de celle-ci d'après les mêmes lois du hasard qui régissent la distribution de Laplace-Gauss en statistique des scalaires, soit

(10)
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma} \exp \left[-\frac{(x_i - \mu)^2}{2\sigma^2} \right] dx = 1$$

Cette loi est caractérisée entre autres par la probabilité de 0.68 pour que l'écart $(x_i - \mu)$ d'une lecture x_i de la moyenne μ de la population soit inférieur à un écart-type σ , et par la probabilité de 0.998 pour que le même écart soit inférieur à 3σ .

Dans le cas d'une population de vecteurs unitaires, la loi analogue pourrait s'écrire

$$(11) \quad \int_0^{\pi} \Psi(\delta) \exp[-r\theta^2/\delta^2] \cdot 2\pi \sin\theta d\theta / 4\pi = 1$$

où $\Psi(\delta)$ est une fonction de δ et r est une constante qu'il reste à définir. L'introduction du facteur $2\pi \sin\theta / 4\pi$ dans la dernière équation relève de la condition posée plus haut que les vecteurs faisant un angle entre θ et $\theta + d\theta$ avec la résultante soient répartis uniformément sur le segment sphérique de rayon $\sin\theta$, de largeur $d\theta$ et centré sur la résultante.

En supposant que tous les vecteurs d'une population normale s'écartent de la moyenne de la population d'un angle inférieur à $\pi/4$ on peut donc écrire

$$(12) \quad \int_0^{3\delta} \Psi(\delta) \exp[2r(\cos\theta - 1)/\delta^2] \sin\theta d\theta / 2 \cong 0.998$$

ou (13) $\Psi(\delta) \cong 4r/\delta^2 (1 - \exp[-9r])$

Si, par analogie avec l'équation (10), la valeur de r est de 0.5, on peut négliger e^{-9r} par rapport à l'unité de sorte que

$$(14) \quad \Psi(\delta) \cong 4r/\delta^2$$

pour toutes fins pratiques. Si l'on s'en rapporte à l'autre caractéristique de l'équation (10) on peut aussi écrire

$$(15) \quad \int_0^{\delta} 2r \exp[2r(\cos\theta - 1)/\delta^2] \sin\theta d\theta / \delta^2 \cong 0.68$$

ou (16) $(1 - \exp[-r]) \cong 0.68$

ce qui suggère que r est beaucoup plus près de l'unité que de 0.5 et donc que e^{-9r} est d'autant plus négligeable par rapport à l'unité. La valeur unitaire de r est d'ailleurs suggérée par le fait que, contrairement aux écarts de la

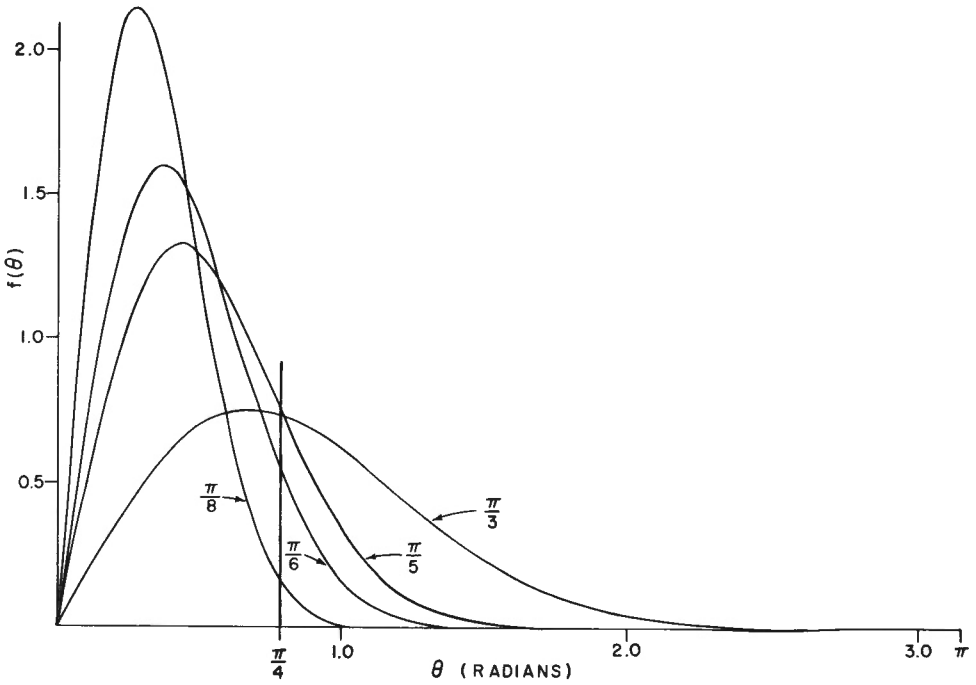


Figure 1. Courbes de distribution des écarts angulaires θ pour les populations normales ayant respectivement un écart-type angulaire δ de $\pi/3$, $\pi/5$, $\pi/6$ et $\pi/8$ radians.

moyenne exacte en statistique des scalaires, les écarts angulaires ne peuvent être que positifs ou nuls. Si l'on adopte la valeur unitaire pour r , l'intégrale de l'équation (15) devient égale à 0.63 tandis que sa valeur devient 0.95 quand la limite supérieure d'intégration est remplacée par $\sqrt{3}\delta$. En d'autres termes, dans une population de vecteurs unitaires distribués normalement et ayant un écart-type angulaire δ , 63 pour cent des vecteurs sont compris dans un cône dont l'angle au sommet est de 2δ tandis que 95 pour cent des vecteurs sont compris à l'intérieur d'un cône d'angle $2\sqrt{3}\delta$.

La distribution des écarts angulaires dans une population normale d'écart-type donné δ peut donc s'exprimer par la fonction

$$(17) \quad f(\theta) = 2\sin\theta \exp[-\theta^2/\delta^2] / \delta^2$$

Les courbes de la Figure 1 représentant la distribution de θ pour diverses valeurs de δ ont été calculées d'après l'équation (17). Théoriquement l'aire sous chacune de ces courbes devrait être égale à l'unité si l'équation (17) est valable sans conditions. On peut vérifier au moyen d'un planimètre ou

autrement que cette aire diminue de fait progressivement de 0.96, pour la courbe calculée en supposant $\delta = \pi/8$, à 0.84, pour la courbe calculée en supposant $\delta = \pi/3$. D'autre part, le pourcentage des aires à droite de la droite $\theta = \pi/4$ augmente de façon correspondante de 1.5 pour cent à 56.0 pour cent, ce qui revient à dire que si $\delta = \pi/3$, au delà de 50 pour cent des vecteurs de la population font un écart de plus de $\pi/4$ avec la moyenne de la population. Ceci implique que si les vecteurs d'un échantillon sont dispersés au point où la valeur de δ calculée d'après l'équation (8) dépasse une certaine valeur légèrement inférieure à $\pi/8$, cette valeur de δ ne correspond plus à une estimation correcte de l'écart-type angulaire d'une population normale. En plus, comme l'équation (17) vaut en autant que l'équation (4) est réalisée par la plupart des vecteurs, on conçoit qu'elle ne saurait valoir rigoureusement non plus si la valeur de δ dépasse sensiblement $\pi/8$.

Vérification de la normalité d'une population

Le fait que la valeur de δ obtenue par l'équation (8) soit inférieure à $\pi/8$ pour un échantillon donné ne suffit évidemment pas à déterminer si la population qu'il représente a une distribution normale, même si les vecteurs qui le composent sont distribués symétriquement autour de leur moyenne. Le critérium χ^2 de Pearson peut nous aider à estimer la probabilité d'une telle distribution dans un échantillon donné.

D'après ce qui a été dit plus haut, la probabilité pour qu'un vecteur tiré au hasard d'une population normale s'écarte de la direction moyenne d'un angle inférieur à θ_1 est donnée par

$$(18) \quad P_1 (\theta \leq \theta_1) = 1 - \exp [2(\cos \theta_1 - 1) / \delta^2]$$

Pour un échantillon de N vecteurs, par exemple, le nombre théorique E_1 de vecteurs s'écartant de la moyenne d'un angle inférieur à θ_1 est donné par NP_1 . D'autre part, on peut estimer le nombre O_1 de vecteurs dans l'échantillon s'écartant de la moyenne exacte (dont un estimé est donné par la moyenne de l'échantillon) d'un angle inférieur à θ_1 . De la même façon, on peut obtenir les nombres $E_2, O_2, E_3, O_3, \dots$ pour les intervalles $\theta_1 < \theta \leq \theta_2, \theta_2 < \theta \leq \theta_3, \dots$ et former la somme

$$(19) \quad \sum_{i=1}^n \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} = S$$

où n représente le nombre d'intervalles limités par les angles $\theta_1, \theta_2, \dots, \pi$. Il importe peu que ces intervalles soient égaux mais on recommande généralement que dans chacun d'eux $E_i \geq 5$. La valeur de S est ensuite comparée à la statistique $\chi^2_{d, \alpha}$ laquelle est donnée dans les tables de mathématiques pour différents degrés de liberté "d" et à différents seuils de probabilité α . Le nombre de degrés de liberté est donné par $(n-1-c)$, où c est le nombre de constantes estimées d'après l'échantillon pour le calcul de S . Dans le cas présent la valeur de δ^2 et celles de deux des cosinus directeurs de la direction moyenne exacte ont dû être estimées à partir de l'échantillon, de sorte que $d = n-4$. La probabilité pour que S soit supérieur à $\chi^2_{d, \alpha}$ lorsque l'échantillon a été tiré d'une population normale est inférieure à α . On convient généralement que si $S \leq \chi^2_{d, 0.05}$ il n'existe pas de preuve suffisante pour accepter l'hypothèse que l'échantillon considéré n'a pas été tiré d'une population normale.

On peut évidemment se servir du même test pour déterminer la probabilité pour que les vecteurs de la population échantillonnée soient distribués symétriquement autour de leur moyenne. Dans ce cas cependant "d" sera donné par $(n-3)$, étant donné que le paramètre δ^2 n'entre plus en ligne de compte dans le calcul des valeurs de E_i .

Méthode d'analyse de la variance

On peut comparer deux ou plusieurs échantillons dans le but de déterminer la probabilité pour qu'ils aient pu être tirés de populations normales ayant une variance commune. La méthode dite d'analyse de la variance, pour résoudre ce problème en statistique des scalaires, peut être adaptée à la statistique des vecteurs. Soit σ_1^2 et σ_2^2 ($\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$) les valeurs estimées de la variance de deux populations normales représentées par des échantillons d'effectifs N_1 et N_2 respectivement. Si les estimations σ_1^2 et σ_2^2 sont basées respectivement sur ν_1 et ν_2 degrés de liberté et si les deux populations échantillonnées ont la même variance, on démontre que le rapport σ_1^2/σ_2^2 est distribué comme la statistique $F_{\nu_1, \nu_2, \alpha}$, laquelle a été compilée sous forme de tables pour divers seuils de probabilité α . Avant de décrire l'application de cette loi à la statistique des vecteurs il convient de définir l'expression "degré de liberté" mentionnée plus haut.

Posons que la somme de n nombres algébriques est définie par la relation

$$(20) \quad \sum_{i=1}^n x_i = S$$

On dit que S possède $(n-1)$ degrés de liberté parce que chacun des $(n-1)$ premiers nombres peut prendre une infinité de valeurs possibles mais, une fois

ces valeurs choisies, le $n_i^{\text{ième}}$ doit forcément prendre la valeur définie par l'équation. Si par ailleurs on suppose que R est le module de la résultante de N vecteurs unitaires, on dit qu'il possède $2(N-1)$ degrés de liberté. En effet, en utilisant la notation donnée au début du présent article, on note que dans l'équation

$$(21) \quad R^2 = (\sum l_i)^2 + (\sum m_i)^2 + (\sum n_i)^2$$

lorsque les valeurs de l_i et de m_i , par exemple, auront été choisies pour les $(N-1)$ premiers vecteurs, les valeurs de n_i seront automatiquement fixées par la relation

$$(22) \quad l_i^2 + m_i^2 + n_i^2 = 1$$

alors que les cosinus directeurs du $N^{\text{ième}}$ vecteur seront fixées par la valeur de R. On remarquera que d'autres expressions telles que $(N-R)^2 = A$ ou encore $2(N-R) / (N-1) = B$ possèdent tout aussi bien $2(N-1)$ degrés de liberté pour des raisons analogues.

Soit deux échantillons de vecteurs unitaires d'effectifs N_1 et N_2 , ($N_1 + N_2 = N$), à partir desquels on a estimé la variance angulaire des populations normales qu'ils représentent comme étant δ_1^2 et δ_2^2 respectivement. Si le rapport δ_1^2 / δ_2^2 ($\delta_1^2 \geq \delta_2^2$) est inférieur à la statistique $F_{2(N_1-1), 2(N_2-1), \alpha}$, on en conclut que la preuve reste à faire que les deux échantillons représentent des populations n'ayant pas la même variance angulaire. En d'autres termes, si $\delta_1^2 / \delta_2^2 > F_{2(N_1-1), 2(N_2-1), \alpha}$, la probabilité pour que la variance des deux populations échantillonnées soit la même est inférieure à α et vice-versa.

On peut se servir du même test pour vérifier si les directions moyennes des deux échantillons diffèrent significativement. En supposant que les directions moyennes sont rigoureusement exactes, on pourrait obtenir un estimé global de l'intra-variance, δ_w^2 , c'est-à-dire de la variance d'un vecteur autour de sa moyenne propre, en écrivant

$$(23) \quad \sum_{j=1}^2 R_j = \sum_{j=1}^2 \sum_{i=1}^{N_j} \cos \theta_{ij} = N - \sum_{j=1}^2 \sum_{i=1}^{N_j} \theta_{ij}^2 / 2$$

ou

$$(24) \quad \frac{\sum \sum \theta_{ij}^2}{N} = 2(N - \sum R_j) / N$$

Cette dernière expression fournit de fait un estimé global de la variance d'un vecteur autour de sa moyenne propre diminuée de celle des moyennes d'échantillons d'effectifs $(N_1 + N_2)/2$. Il s'ensuit que

$$(25) \quad 2(N - \Sigma R_j) / N = (1 - 2/N) \delta_w^2$$

ou $(26) \quad \delta_w^2 = 2(N - \Sigma R_j) / (N - 2)$

On peut vérifier que la valeur de δ_w^2 telle que définie par l'équation précédente correspond à peu près à celle de $(N_1 \delta_1^2 + N_2 \delta_2^2) / N$, même si les effectifs des deux échantillons sont très inégaux.

Il est clair que δ_w^2 possède $2(N-2)$ degrés de liberté puisque chacune des 2 résultantes en possède en moyenne $2(N/2-1)$. $2(N_1-1) + 2(N_2-1) = 2(N-2)$

Pour estimer l'inter-variance, c'est-à-dire la variance des moyennes autour de la résultante des N vecteurs, on doit éliminer l'apport de l'intra-variance. Le module de chaque résultante n'est donc plus R_j mais N_j , bien que sa direction demeure inchangée. Dénnotant par θ_j , l'angle entre chaque résultante et celle des N vecteurs unitaires, on peut écrire

$$(27) \quad R' = \sum_{j=1}^2 N_j \cos \theta_j = N - \Sigma N_j \theta_j^2 / 2$$

La somme $\Sigma N_j \theta_j^2 / 2$ représente l'inter-variance angulaire d'une résultante diminuée de celle des moyennes d'échantillons de 2 vecteurs, soit

$$(28) \quad 2(N - R') / 2 = (1 - 1/2) \delta_b^2$$

d'où l'on tire

$$(29) \quad \delta_b^2 = 2(N - R') / (2 - 1)$$

On objectera peut-être que l'équation précédente ne saurait fournir une estimation valable de l'inter-variance parce que l'équation

$$(30) \quad 2(N - R) = 2(N - R') + 2(N - \Sigma R_j)$$

n'est généralement pas réalisée. Cette objection tiendrait du fait qu'à partir de l'axiome

$$(31) \quad (x_{ij} - \mu) = (x_{ij} - \bar{x}_j) + (\bar{x}_j - \mu)$$

on démontre en statistique des scalaires que

$$(32) \quad \sum_{j=1}^B \sum_{i=1}^{N_j} (x_{ij} - \mu)^2 = \sum_{j=1}^B \sum_{i=1}^{N_j} (x_{ij} - \bar{x}_j)^2 + \sum_{j=1}^B N_j (\bar{x}_j - \mu)^2$$

où B dénote le nombre des groupes dont les effectifs respectifs sont N_j . Si on note toutefois que θ_{ij} , θ_i et θ_j remplacent respectivement $(x_{ij} - \mu)$, $(x_{ij} - \bar{x}_j)$ et $(\bar{x}_j - \mu)$ en statistique des vecteurs, on voit que la relation

$$(33) \quad \theta_{ij} = \theta_i + \theta_j$$

n'est généralement pas réalisée et, partant, l'équation (30) ou encore

$$(34) \quad \sum_{j=1}^B \sum_{i=1}^{N_j} \theta_{ij}^2 = \sum_{j=1}^B \sum_{i=1}^{N_j} \theta_i^2 + \sum_{j=1}^B N_j \theta_j^2$$

ne saurait l'être davantage. Le simple fait de remplacer $(N-R')$ par $(\sum R_j - R)$ dans l'équation (30) en ferait un axiome mais ceci ne semble pas justifier qu'on définisse δ_B^2 par $2(\sum R_j - R)/(2-1)$. En effet, δ_B^2 doit d'abord être débarrassé de l'effet de l'intra-variance et il est clair que $(N-R')$ l'est tandis que $(\sum R_j - R)$ ne l'est pas nécessairement. Très souvent la distinction précédente n'a aucune importance mais si on suppose le cas simple où les deux échantillons ont le même effectif et la même intra-variance, on peut vérifier que

$$(35) \quad \sum R_j - R = \sum R_j - R' \leq N - R'$$

ce qui indique qu'en utilisant l'expression

$$(36) \quad \delta_B^2 = 2(\sum R_j - R)/(2-1)$$

au lieu de l'équation (29) on peut sous-estimer l'inter-variance.

Les équations (26) et (29) fournissent donc deux moyens d'estimer la variance d'une population en considérant soit la variation des directions moyennes des échantillons, soit celle des vecteurs autour de la direction moyenne exacte de la population. Si ces deux estimations sont compatibles, le rapport δ_b^2/δ_w^2 doit être inférieur à la statistique F correspondante. Si le contraire se produit, on est alors justifié de soupçonner que la dispersion des directions moyennes des deux échantillons est supérieure à celle des vecteurs autour de leurs moyennes propres: on dira alors que les directions moyennes divergent significativement.

On peut évidemment étendre l'application de la méthode de l'analyse des variances à B échantillons dont les effectifs respectifs seraient N_1, N_2, \dots, N_B . Les estimations de δ_w^2 et δ_b^2 sont alors données par les relations générales

$$(37) \quad \delta_w^2 = 2(N - \sum R_j) / (N - B)$$

et $(38) \quad \delta_b^2 = 2(N - R') / (B - 1)$

tandis que les nombres de degrés de liberté sont donnés par $2(N - B)$ et $2(B - 1)$ respectivement pour ces deux variances.

Si les directions moyennes de plusieurs échantillons ne divergent pas significativement, on peut considérer l'ensemble des N vecteurs comme faisant partie d'un seul échantillon dont l'écart-type δ est défini par l'équation (8), tandis que l'équation (9) définit l'écart-type δ_R de sa moyenne. On désigne parfois δ_R sous le nom de l'erreur standard de la moyenne tandis que son erreur probable $\alpha . 50$ et le rayon du cercle de confiance $\alpha . 95$ qui l'entoure sont définis respectivement par $\sqrt{\log_e 2} \delta_R$ et $\sqrt{3} \delta_R$.

Si les directions moyennes des B échantillons divergent significativement dans le sens précisé plus haut, nous sommes moins intéressés à connaître l'écart-type des N vecteurs que celui des B directions moyennes, surtout si celui-ci tient compte des différences entre les effectifs des échantillons. La statistique répondant à ces exigences est définie par

$$(39) \quad \delta_m = \delta_b \sqrt{B/N}$$

et les "erreurs" de la résultante deviennent dans ce cas

$$(40-a) \quad \delta_{\bar{m}} = \delta_m / \sqrt{B}$$

$$(40-b) \quad \alpha'_{.50} = \delta_{\bar{m}} \sqrt{\log_e 2}$$

et $(40-c) \quad \alpha'_{.95} = \delta_{\bar{m}} \sqrt{3}$

On note que si les B échantillons possèdent des effectifs à peu près égaux et à peu près la même intra-variance, la résultante de leurs moyennes normalisées est coaxiale avec celle des N vecteurs et son écart-type, $\delta_{\bar{m}}$, est effectivement égal à $\delta_{\bar{m}}$.

Exemple numérique

L'exemple choisi pour illustrer les considérations théoriques qui précèdent est basé sur les résultats d'une étude récente de l'aimantation rémanente stable de 91 échantillons. Ceux-ci proviennent de 18 affleurements répartis sur 4 massifs intrusifs situés au SE du Québec (Larochelle, 1968). L'analyse ne porte que sur les données obtenues pour 74 de ces échantillons provenant de 16 sites, une élimination préalable ayant été faite de 17 échantillons dont le comportement sous l'effet d'un champ alternatif décroissant avait indiqué une aimantation rémanente hétérogène ou d'origine secondaire.

Les directions d'aimantation des échantillons considérés comme valables se groupent autour de deux directions moyennes diamétralement opposées: les aimantations des échantillons provenant de l'un des massifs, le Mont Johnson, pointent toutes vers le bas tandis que celles des échantillons en provenance des trois autres intrusifs étudiés pointent vers le haut sans exception. Pour les fins de cette analyse la polarité des premières a été renversée.

Un premier examen des données a révélé qu'aucun des 74 vecteurs considérés ne diverge de l'axe de leur résultante d'un angle supérieur à 25°. Le test basé sur le critérium χ^2 de Pearson a de plus indiqué que les vecteurs sont distribués normalement (Tableau I), ce qui justifie l'emploi de la méthode d'analyse de la variance pour tenter de déterminer les causes principales de la dispersion angulaire, soit: 1- les erreurs de mesures et l'hétérogénéité de la roche à l'échelle de l'échantillon, 2- les erreurs de l'échantillonnage et les hétérogénéités de la roche à l'échelle du site, 3- la variation séculaire et les anomalies locales du champ magnétique ancien auxquelles s'ajoutent les basculements relatifs de la roche, et 4- les différences d'âge entre les quatre intrusifs étudiés.

Pour estimer l'effet dispersif des erreurs de mesures, deux échantillons ont été tirés au hasard et l'aimantation de deux spécimens représentatifs de chacun a été mesurée à dix reprises. Les 40 mesures ainsi obtenues sont rapportées au Tableau II qui comporte en plus la direction moyenne

TABLEAU I

Distribution des écarts angulaires θ ; test par le criterium χ^2

Inter- valles	0° - 3°	3° - 5°	5° - 6°	6° - 7°	7° - 8°	8° - 9°	9° - 10°	10° - 11°	11° - 13°	13° - 15°	15° - 180°
E_1	5.6	8.9	5.4	5.8	5.9	5.8	5.6	5.2	8.8	6.5	10.4
O_1	8.0	12.0	6.0	3.0	5.0	6.0	6.0	4.0	6.0	7.0	11.0

$$\sum (E_1 - O_1)^2 / E_1 = 4.9$$

$$\chi^2_{7, .05} = 14.07$$

TABLEAU II

Mesures répétées des directions d'alimentation de deux échantillons

Mesure N°	Echantillon N° 1				Echantillon N° 2			
	1 ^{er} spéc.		2 ^e spéc.		1 ^{er} spéc.		2 ^e spéc.	
	D	I	D	I	D	I	D	I
1	138.2	-39.0	144.2	-47.4	129.3	-26.8	133.6	-33.7
2	138.5	-39.2	144.1	-47.8	129.9	-28.2	133.7	-34.5
3	138.3	-39.3	144.1	-48.0	129.9	-28.6	133.6	-35.1
4	138.4	-39.3	143.9	-47.8	130.1	-29.0	133.5	-35.3
5	138.2	-39.4	143.8	-48.0	130.0	-29.4	133.8	-35.6
6	138.3	-39.4	143.4	-47.5	130.1	-29.6	133.7	-35.8
7	138.4	-39.4	143.3	-47.7	130.1	-29.7	133.9	-35.9
8	138.4	-39.3	143.4	-47.9	130.0	-30.1	133.7	-36.1
9	138.1	-39.5	143.8	-47.8	129.9	-30.2	133.9	-36.2
10	138.4	-39.4	144.0	-47.8	129.9	-31.1	133.8	-36.2
Moy.	138.2	-39.3	143.8	-47.8	129.9	-29.6	133.7	-35.4
$\delta_B^2 = .13255$		$\delta_W^2 = .00002$		$\delta_B^2 = .06806$		$\delta_W^2 = .00022$		
$\delta_B^2 / \delta_W^2 = 7,584.4$				$\delta_B^2 / \delta_W^2 = 315.6$				
$F_{2,36, .05} = 3.26$								

TABLEAU III

Directions d'aimantation des spécimens du site N° 1

Echantillon	N° 1		N° 2		N° 3		N° 3	
	D	I	D	I	D	I	D	I
Spéc. 1	150.2	-58.1	147.2	-55.9	148.2	-54.7	154.2	-63.1
Spéc. 2	159.0	-60.2	147.7	-60.5	145.9	-56.0	153.9	-60.2
Moy.	154.5	-59.2	147.4	-58.2	147.1	-55.4	154.0	-61.6
$\delta_D^2 = .00685$		$\delta_W^2 = .00220$		$\delta_D^2/\delta_W^2 = 3.11$		$F_{6,8,.05} = 3.58$		

obtenue pour chaque spécimen ainsi que l'intra-variance et l'inter-variance angulaires de chaque échantillon. Le calcul du rapport δ_D^2/δ_W^2 dans chaque cas indique clairement que les erreurs de mesures sont tout à fait négligeables par rapport à l'hétérogénéité de l'aimantation à l'échelle de l'échantillon. Il n'y avait donc pas lieu de répéter la mesure de chaque spécimen des autres échantillons à moins que l'écart angulaire entre les deux vecteurs d'un échantillon n'indiquât la possibilité d'une déféctuosité temporaire du magnétomètre au cours des mesures.

L'étape suivante de l'analyse a pour but de comparer l'importance des facteurs de dispersion des directions d'aimantation des spécimens à l'intérieur d'un site. Les mesures simples effectuées sur chaque spécimen en provenance du site N° 1 et les statistiques correspondantes sont reproduites au Tableau III en guise d'exemple. Le rapport δ_D^2/δ_W^2 indique que l'effet dispersif de l'hétérogénéité de la roche à l'échelle de l'échantillon est au moins aussi important que celui de l'hétérogénéité de la roche à l'échelle du site à laquelle s'ajoute l'erreur d'échantillonnage. Des résultats analogues ont été obtenus à deux autres sites, tel que l'indique le Tableau IV. On peut rappeler aussi que plus d'une dizaine d'échantillons ont été exclus de la présente analyse précisément à cause de l'hétérogénéité particulièrement prononcée de leur aimantation. Dans la majorité des cas toutefois l'aimantation de la roche étudiée est relativement plus homogène à l'intérieur des échantillons que les directions moyennes à l'intérieur des sites. Comme la dispersion à l'intérieur des échantillons (δ_W) n'est que de quelques degrés dans tous les cas, on peut donc considérer comme valable la direction moyenne d'aimantation obtenue pour chaque échantillon et s'en servir comme base pour la prochaine étape de l'analyse.

Le Tableau V donne les directions d'aimantation des échantillons en provenance de l'un des 4 massifs étudiés, le Mont St-Bruno. À ce niveau de l'échantillonnage, il s'agit de comparer l'importance des principaux facteurs de dispersion des aimantations à l'intérieur d'un site par rapport à celle des

facteurs de dispersion des directions moyennes des sites à l'intérieur de chaque massif. Le rapport δ_B^2/δ_W^2 est encore supérieur à la statistique F correspondante mais on ne saurait considérer comme négligeable l'effet des erreurs d'échantillonnage ou de l'hétérogénéité de la roche à l'échelle du site.

TABLEAU IV

Intra- et inter-variance à l'échelle des sites

Site N°	B	δ_B^2	δ_W^2	δ_B^2/δ_W^2	F. ₀₅
1	4	.00685	.00220	3.113	3.58
2	5	.05535	.00257	21.554	3.07
3	5	.06204	.00677	9.159	3.07
5	6	.01448	.00096	15.004	2.75
6	6	.06875	.00552	12.446	2.75
7	6	.02319	.00207	11.224	2.75
8	2	.05580	.00707	7.888	6.94
10	3	.06548	.00870	7.525	4.53
11	5	.01270	.00281	4.526	3.07
12	4	.03160	.00949	3.331	3.58
13	6	.04088	.00346	11.813	2.75
14	3	.00394	.01155	0.341	4.53
15	5	.02043	.00364	5.616	3.07
16	6	.00660	.00110	5.983	2.75
17	4	.04101	.00790	5.192	3.58
18	4	.18141	.00320	56.674	3.58

B est le nombre d'échantillons provenant de chaque site
 F.₀₅ est la statistique théorique $F_{2(B-1), 2B, .05}$

Nous voyons au Tableau VI que les mêmes conclusions s'imposent vis-à-vis les résultats obtenus pour les Monts Brome et Shefford tandis que les résultats du Mont Johnson sont beaucoup moins éloquentes. Un fait à noter est que le Mont Johnson est de beaucoup le plus petit des 4 massifs étudiés et que les sites de prélèvement y sont relativement rapprochés les uns les autres. Le refroidissement de ce massif a donc été d'une durée relativement courte et la probabilité de déplacements tectoniques à l'intérieur de ses limites est moindre. Les résultats de l'analyse sont donc très compatibles avec la réalité géologique et indiquent que les variations du champ magnétique ancien et les mouvements du sol forment d'importantes causes de dispersion dans la présente série de données.

TABLEAU V

Directions moyennes d'aimantation des échantillons
provenant du mont St-Bruno

Echantillon	N° 1		N° 2		N° 3		N° 4		N° 5	
	D	I	D	I	D	I	D	I	D	I
Site N° 1	154.5	-59.2	147.5	-58.2	147.1	-55.4	154.0	-61.6	-	-
Site N° 2	140.7	-68.9	136.7	-53.5	129.3	-56.7	156.2	-50.6	155.7	-57.6
Site N° 3	146.2	-48.3	162.6	-44.1	175.2	-52.2	181.0	-43.8	160.9	-42.2
$\delta_b^2 = .12732$		$\delta_w^2 = .02234$		$\delta_b^2/\delta_w^2 = 5.7$		$F_{4,22,.05} = 2.82$				

Puisque les directions moyennes des sites diffèrent généralement à l'intérieur de chaque massif on ne saurait considérer les 74 échantillons comme ayant été tirés d'une population commune. En les groupant par sites, sans considération du massif auquel ils appartiennent, on retrouve les mêmes résultats que précédemment, c'est-à-dire que les directions moyennes des sites diffèrent significativement entre elles. L'écart-type angulaire qui nous intéresse dans le cas présent est donc celui des moyennes des sites, lequel est donné par δ_m , comme nous l'avons indiqué précédemment.

L'étape finale de l'analyse consiste à comparer la variation des directions moyennes des sites avec celles des massifs. La méthode de la variance indique clairement (Tableau VII) que les directions moyennes d'aimantation des massifs ne diffèrent pas significativement et par conséquent que les 4 massifs ont dû être formés au cours de la même époque géologique. Ceci ne s'applique pas totalement au Mont Johnson toutefois si l'on considère que la polarité de son aimantation rémanente est normale, contrairement aux autres massifs étudiés. Les quelques milliers d'années qui ont pu s'écouler au cours du renversement de la polarité du champ terrestre ancien peuvent

TABLEAU VI

Intra- et inter-variance des directions d'aimantation
à l'échelle des intrusifs

Intrusifs	N	B	δ_D^2	δ_W^2	δ_D^2/δ_W^2	F
St-Bruno	14	3	.12732	.02234	5.7	2.8
Shefford	18	3	.18212	.01777	10.3	2.7
Brome	28	7	.06235	.01494	4.2	2.0
Johnson	14	3	.09055	.03170	2.9	2.8
Montérégiennes	74	16	.09111	.02025	4.5	1.6

N et B sont respectivement les nombres d'échantillons
et de sites; F est la statistique théorique $F_{2(B-1),2(N-B),.05}$

TABLEAU VII

Directions moyennes d'aimantation aux 16 sites de prélèvement

Intrusif	Site	D	I	Intrusif	Site	D	I
St-Bruno	1	150.6	-58.6	Brome	8	144.4	-45.5
"	2	144.2	-57.9	"	10	161.7	-50.7
"	3	165.2	-46.7	"	11	145.9	-60.6
Shefford	5	156.4	-62.9	"	12	152.8	-51.5
"	6	170.5	-50.3	"	13	155.0	-60.7
"	7	143.9	-62.1	"	14	156.8	-57.2
Johnson	16	145.2 (325.2)	-64.8 (64.8)	"	15	147.9	-65.4
"	17	164.1 (344.1)	-68.4 (68.4)	Johnson	18	148.9 (328.9)	-54.3 (54.3)
$\delta_D^2 = .015$		$\delta_W^2 = .022$		$\delta_D^2/\delta_W^2 = .7$		$F_{6,24,.05} = 2.51$	

faire la différence d'âge. Il semble juste de croire en plus que le refroidissement de chaque massif n'a pas été un phénomène instantané bien que la formation des trois premiers se soit vraisemblablement produite au cours de la même période. En d'autres termes, la différence d'âge des massifs n'est pas considérée comme un facteur important de dispersion des directions d'aimantation dans le présent cas.

Conclusion

Le présent article avait pour but de démontrer que les méthodes de la statistique peuvent s'appliquer aux données paléomagnétiques sans passer par les dédales de la haute mathématique. Les solutions auxquelles nous sommes arrivés sont à peu près les mêmes que celles qu'avaient prévues Fisher (1953) et Watson (1956) en employant une dialectique peu à la portée des paléomagnéticiens. Signalons toutefois que la définition d'inter-variance donnée par l'équation (38) semble correspondre davantage à son analogue en statistique des scalaires que la définition acceptée auparavant. Si cette distinction a en général peu d'importance dans la pratique, il faut cependant insister sur le fait qu'un échantillon pour lequel la valeur de δ calculée d'après l'équation (8) dépasse sensiblement $\pi/8$ ne saurait être considéré comme représentatif d'une population normale. Il semble clair en tout cas que la limite supérieure admissible pour que δ représente un écart-type réel est très inférieure à $\pi/4$, contrairement à ce qu'ont préconisé implicitement Fisher et Watson (op. cit.) en admettant comme valable un échantillon caractérisé par un indice k égal à 3: un tel échantillon aurait en effet un écart-type apparent légèrement supérieur à $\pi/4$.

Références

- Bruckshaw, J. M., et Vincenz, S. A.
1954: The permanent magnetism of the Mull lavas; Monthly Notices, Roy. Astron. Soc.; Geophy. Suppl., vol. 6, No. 9, p. 579.
- Fisher, R. A.
1953: Dispersion on a sphere; Proc. Roy. Soc., Ser. A, vol. 217, p. 295.
- Larochelle, A.
1967: A re-examination of certain statistical methods in palaeomagnetism; Geol. Surv. Can., Paper 67-18.
- 1968: The paleomagnetism of the Monteregian Hills; New results; J. Geophy. Res., vol. 73, p. 3239.
- Watson, G. S.
1956: Analysis of dispersion on a sphere; Monthly Notices, Roy. Astron. Soc., Geophy. Suppl., vol. 7, No. 4, p. 153.